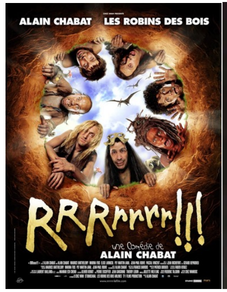


Définition 6.10 : Continûment dérivable, $C^n(D)$, dérivée d'ordre n.

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ dérivable.

(i) Si $f' \in C^0(D)$, on dit que f est <u>continûment dérivable</u> et on note $f \in C^1(D)$,

$$C^1(D) = \{ g \in C^0(D) : g \text{ est continûment dérivable} \}$$

(ii) Si f & f' sont continument dérivable (on note généralement f'' pour la dérivée de f'), on dit que f est deux fois continument dérivable. On définit

$$C^2(D) = \{ g \in C^1(D) : g \text{ est deux fois continument dérivable} \}$$

$$= \{ g \in C^1(D) : g' \text{ est continument dérivable} \}$$

$$= \{ g \in C^1(D) : g' \in C^1(D) \} .$$

(iii) On continue ainsi, si la dérivée d'ordre k de f (qu'on not $f^{(k)}$) est continûment dérivable pour $1 \leq k \leq n-1$, on dit que f est n fois <u>continûment dérivable</u>.

On note la dérivée de $f^{(n-1)}$, $f^{(n)}$, qu'on appelle la <u>dérivée d'ordre n</u> de f et on définit

$$C^n(D) = \{ g \in C^{n-1}(D) : \ g^{(n-1)} \in C^1(D) \}$$

(iv) On définit $C^\infty(D) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C^n(D)$

si $f \in C^\infty(D)$, on dit que f est <u>infiniment dérivable</u>

<u>Exemple 6.11</u> :

(i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \cdot |x|$.

Alors, $f'(x) = 2|x|$ (pour $x \neq 0$, on a $|x| = \begin{cases} x \\ -x \end{cases}$ et utiliser les règles de dérivation

pour $x=0$, $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$.)

qui est continue.

$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R})$

Par contre, f' n'est pas dérivable en 0

$\Rightarrow f''$ n'existe pas $\Rightarrow f \notin C^2(\mathbb{R})$

Plus généralement, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^k|x|$ vérifie $g \in C^k(\mathbb{R}) \setminus C^{k+1}(\mathbb{R})$

(ii) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x|x|$

Alors, $f'(x) = 2|x|$,

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x>0 \\ -2 & \text{si } x<0 \end{cases}, \quad f^{(3)}(x) = 0, \quad f^{(4)}(x) = 0, \ldots$$

$\Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$

<u>Théorème 6.12</u>

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert et $x_0 \in D$, $f: D \to \mathbb{R}$ continue.

Supposons que

(i) f est dérivable sur $D \setminus \{x_0\}$, i.e. $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$ f est dérivable en x.

(ii) $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existe

Alors, f est dérivable en x_0 et

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

<u>Remarque</u> 6.13

Dans la remarque 5.4, on a vu que f discontinue en x_0 donnait 2 possibilités :

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas

si $f = g'$ pas possible 2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe, mais $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Le théorème nous dit que si f' est discontinue en x_0, nécessairement, $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ n'existe pas

Exemple 6.14

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme combinaison de fonctions dérivables usuelles :

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Remarquons que $\lim_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas

Néanmoins,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ f dérivable et

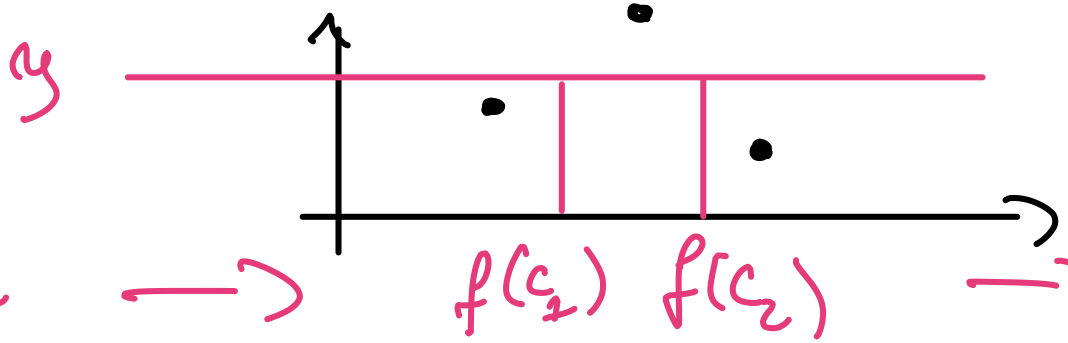
$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Conclusion f est dérivable mais pas continûment dérivable.

§6.3 Existence, continuité et dérivabilité de la fonction réciproque.

Proposition 6.15

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f: I \to \mathbb{R}$ continue. Alors, f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.



TVI $\longrightarrow$ pas injectif

Théorème 6.16

$f : I \to Z \subseteq \mathbb{R}$ surjective

Soit I un intervalle et $\overbrace{f : I \to f(I)}$ une fonction continue et bijective. Alors, $f^{-1}(I) \to I$ est continue

peut être remplacé par strictement monotone

Théorème 6.17.

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \to f(I)$ continue, bijective , dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$.

Alors, $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

<u>Remarque 6.18</u>

Si f et f^{-1} sont toutes deux dérivable, on retrouve la formule à l'aide de la proposition 6.4 (dérivée d'un produit de composition). En effet, si

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad\qquad f(f^{-1}(x)) = x$$

En dérivant :

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \qquad f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

plus utile.

Pour trouver les dérivées de arccos & arcsin

On a $\cos(\arccos(x)) = x$

$\Rightarrow \quad -\sin(\arccos(x)) \cdot \arccos'(x) = 1$

$\Rightarrow \quad \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sin(\arccos(x))}$

Vu que $\sin^2 + \cos^2 = 1$, on a $\sin = \sqrt{1-\cos^2}$

On déduit

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

<u>Théorème 6.19</u>

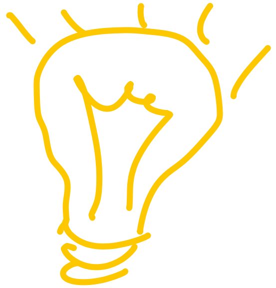
Soit $f : I \to f(I)$ une fonction dérivable tq $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$. Alors f est bijective et f^{-1} est dérivable et $\forall\, y \in f(I)$

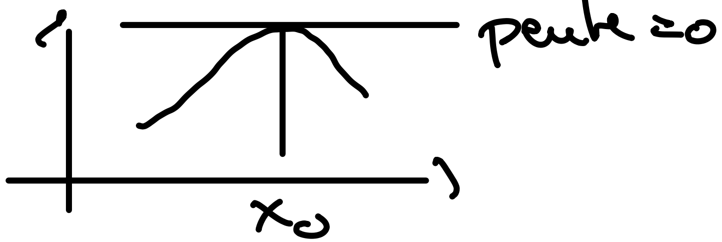
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f(y))}$$

§6.4 Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis et la règle de Bernoulli-L'Hospital

Proposition 6.20

Soit $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ t.q. f est définie au voisinage de x_0, f est dérivable en x_0 et f prend son minimum ou son maximum en x_0. Alors, $f'(x_0) = 0$.





$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Preuve : supposons que f prend son max en x_0.

Alors,
$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \leq 0$$

De plus,
$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} \geq 0$$

Ainsi,
$$0 \leq f'_g(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0) \leq 0$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

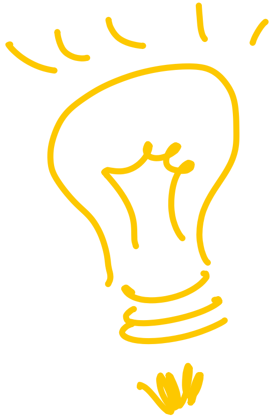
Théorème 6.21 (Théorème de Rolle)

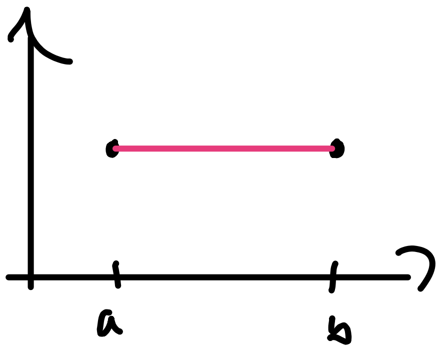
Soient $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue tq

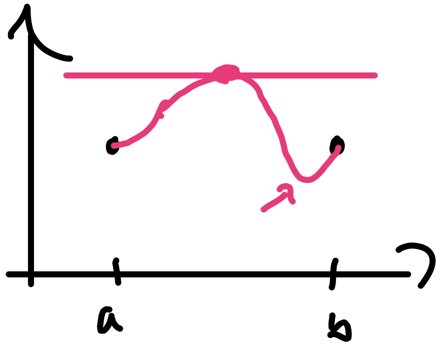
(i) f est dérivable sur $]a,b[$

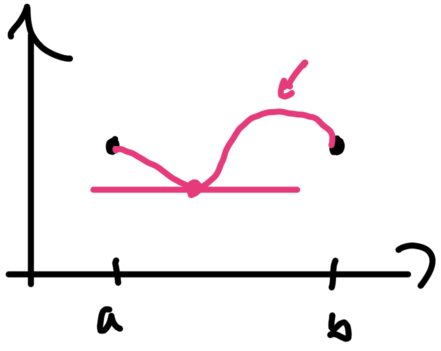
(ii) $f(a)=f(b)$.

Alors, $\exists\, c\in\,]a,b[$ tq $f'(c)=0$.









Preuve : Vu que $[a,b]$ est fermé borné et f est continue, f prend son minimum et son maximum sur $[a,b]$. (thm 5-17 (iii))

Soit $x_1, x_2 \in [a,b]$ tq $f(x_1) = m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $f(x_2) = M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

On distingue 3 cas : $m = M$, $m < f(a) = f(b)$, $f(a) = f(b) < M$

Cas 1 : $m = M$.

On a alors, que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = m = M$, i-e. f est constante.

Donc, quel que soit $c \in]a,b[$, on a $f'(c) = 0$.

Cas 2 : $m < f(a) = f(b)$.

Alors, $x_1 \in]a,b[$. Donc, f est définie au voisinage de x_1, f est dérivable en x_1 et prend son minimum en x_1 $\underset{\text{prop 6.20}}{\Longrightarrow}$ $f'(x_1) = 0$.

Soit $c = x_1$, on a alors, $c \in]a,b[$ et $f'(c) = 0$.

Cas 3 : $f(a) = f(b) < M$.

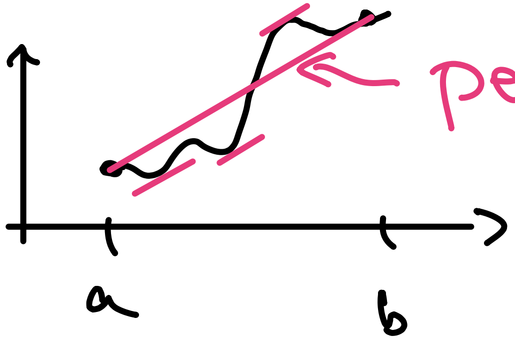
Alors, $x_2 \in]a,b[$. Donc, f est définie au voisinage de x_2, f est dérivable en x_2 et prend son maximum en x_2 $\underset{\text{prop 6.20}}{\Longrightarrow}$ $f'(x_2) = 0$.

Soit $c = x_2$. On a alors, $c \in]a,b[$ et $f'(c) = 0$. ☒

Théorème 6.22 (théorème des accroissements finis / TAF)

Soit $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors, $\exists\, c\in\,]a,b[$ tq

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



pente ici $=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ est la droite qui passe par $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$

Preuve :

Posons $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$

$$g(a)=\cancel{f(a)}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\overset{0}{\cancel{(a-a)}}-\cancel{f(a)}=0$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} - f(a) = f(b) - f(a) + f(a) - f(a)$$

$$= 0.$$

Vu que g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, par le théorème de Rolle, $\exists\, c \in]a,b[$ tq $g'(c) = 0$. Or, $\forall x \in]a,b[$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow 0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\blacksquare$

Remarque 6.23 (reformulation du TAF)

Alternativement, la conclusion du TAF peut s'écrire : $\exists\, \theta \in]0,1[$ tq

$$f'(a+\theta(b-a)) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ceci est vrai aussi si $a>b$.

$$c = a+\theta(b-a) \quad \longleftrightarrow \quad \theta = \frac{c-a}{b-a}$$

Théorème 6.24 (TAF généralisé)

Soit $a<b$, $f,g:[a,b]\to$ continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, tq $g(b)\neq g(a)$ et $\forall x\in]a,b[$, $g'(x)\neq 0$.

Alors, $\exists\, c\in]a,b[$ tq

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Théorème 6.25 (Bernoulli - L'Hospital)